<u>ΘΕΜΑΤΑ - ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ</u>

§1.2 Συναρτήσεις

1) Τί ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α; Πώς συμβολίζεται; **(2018ΕΠ,2019) σελ. 15 ορσ.**
2) Τί ονομάζουμε σύνολο τιμών f(A), μιας συνάρτησης f ; **σελ. 15**
3) Τί ονομάζουμε γραφική παράσταση C_f, μιας συνάρτησης f ; **σελ. 16**
4) Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες; **(2007, 2016) σελ. 23**
5) Πώς ορίζεται η σύνθεση μιας συνάρτησης f με μια συνάρτηση g; **σελ. 25**

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με **Σωστό** ή **Λάθος:**
Α) Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . **ΣΛ (2018) σελ. 17**
Β) Η γραφική παράστασης της συνάρτησης **−f** είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα x΄x, της γραφικής παράστασης της f, γιατί αποτελείται από τα σημεία M΄(x,−f(x)) που είναι συμμετρικά των M(x, f(x)), ως προς τον άξονα x΄x. **σελ. 18**
Γ) Η γραφική παράσταση της | f | αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα x΄x, των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν. **(2019ΕΠ) σελ. 18**
Δ) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού IR και ορίζονται οι συνθέσεις fog και gof, τότε αυτές οι συνθέσεις είναι υποχρεωτικά ίσες. **ΣΛ (2004ΕΠ, 2010ΕΠ, 2015) σελ. 26**
Ε) Αν για δύο συναρτήσεις f,g ορίζονται οι fog και gof, τότε είναι υποχρεωτικά fog ≠ gof. **ΣΛ(2005ΕΠ) σελ. 26**
Ζ) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A και B αντίστοιχα η gof ορίζεται αν f(A)∩B ≠ Ø **ΣΛ (2017) σελ. 25**
Η) Αν για τις συναρτήσεις f, g, h, ορίζονται οι ho(gof) και (hog)of ,τότε ισχύει ho(gof)=(hog)of. **σελ. 26**
Θ) Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το [0, 1] και σύνολο τιμών το [2, 3], τότε ορίζεται η fog με πεδίο ορισμού το [0, 1] και σύνολο τιμών το [2, 3]. **Λ (2018ΕΠ)**

§1.3 Μονότονες συναρτήσεις – αντίστροφη συνάρτηση

1) Πότε μια συνάρτηση f, λέγεται γνησίως αύξουσα σ’ ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της; **σελ. 31**
2) Πότε μια συνάρτηση f, λέγεται γνησίως φθίνουσα σ’ ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της; **σελ. 31**
3) Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει στο $x_o \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_o)$; **(2010ΕΠ, 2014) σελ.32 ορσ**
4) Πότε μια συνάρτηση f:A → IR λέγεται “1-1”; **(2005ΕΠ, 2015ΕΠ) σελ.33 ορσ**
5) Πότε μια συνάρτηση f:A → IR έχει αντίστροφη; **(2019) σελ.35** (όταν είναι 1 – 1)
6) Πώς ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f; **(2019) σελ.35** (από την • μέχρι το τέλος της σελίδας)

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με **Σωστό** ή **Λάθος:**
Α)Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$, ώστε $f(x_1) < f(x_2)$. **ΣΛ(2017ΕΠ) σελ.31**
Β) Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_o \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_o)$ για κάθε $x \in A$ **ΣΛ(2009) σελ.32**
Γ) Η συνάρτηση f(x)=ημx με $x \in \mathbf{R}$ έχει μία μόνο θέση ολικού μεγίστου. **ΣΛ(2018) σελ.33**

Δ) Κάθε συνάρτηση, που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη. **ΣΛ (2002) σελ.34-35**
Ε) Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Κάθε συνάρτηση f:**R**→**R** που είναι “1-1” είναι και γνησίως μονότονη.»
α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.
β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. **(2018) σελ.34-35**
Ζ) Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1–1, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες **ΣΛ(2008) σελ.34-35**
Η) Μία συνάρτηση $f : A \to IR$ είναι συνάρτηση 1 - 1, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 = x_2$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$ **ΣΛ (2003ΕΠ) σελ.34**
Θ) Μια συνάρτηση $f:A\to IR$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1,x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1\neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$ ΣΛ(2011
Ι) Μια συνάρτηση $f:A \to IR$ είναι 1–1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση f(x)=y έχει ακριβώς μία λύση ως προς x . **ΣΛ (2006ΕΠ , 2012, 2016 !) σελ.34**
Κ) Η συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο. **ΣΛ(2009ΕΠ, 2018ΕΠ) σελ.34**
Λ) Αν μια συνάρτηση $f:A\to IR$ είναι 1−1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει:
$f^{-1}(f(x)) = x$, $x\in A$ και $f(f^{-1}(y)) = y$, $y \in f(A)$ **ΣΛ(2008ΕΠ) σελ.36**
Μ) Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y = x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄. **ΣΛ (2004ΕΠ, 2011, 2018) σελ.36 – 37**
Ν) Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο Α με την ευθεία y = x, τότε το σημείο Α ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{-1}. **ΣΛ (2005) σελ.36 – 37**
Ξ) Αν ένα σημείο Μ(α,β) ανήκει στη γραφική παράσταση μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f, τότε το σημείο Μ΄(β,α) ανήκει στη γραφική παράσταση C΄ της f^{-1}. **ΣΛ (2017ΕΠ) σελ.36 – 37**

§1.4 Όριο συνάρτησης στο $x_0 \in IR$

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με **Σωστό** ή **Λάθος:**

Α) Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σ’ ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_o) \cup (x_o, \beta)$ και k ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = k \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_o}(f(x)-k) = 0$ **ΣΛ(2008) σελ.43**

Β) Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σ’ ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_o) \cup (x_o, \beta)$ και ℓ ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0}(f(x_o+h) = \ell$ **σελ.43**

Γ) $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = \ell$ αν και μόνο αν $\lim\limits_{x\to x_o^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_o^-} f(x) = \ell$ **ΣΛ (2004) σελ.44**

Δ) Ισχύουν ότι $\lim\limits_{x\to x_o} x = x_o$ και $\lim\limits_{x\to x_o} c = c$ **σελ.45**

§1.5 Ιδιότητες των ορίων

1) Να αποδείξετε ότι για μια πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_o$ και $x_o \in IR$ ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to x_o} P(x) = P(x_o)$ **σελ. 49**

2) Να αποδείξετε ότι για μια ρητή συνάρτηση $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του x, και $x_o \in IR$ με $Q(x_o)\neq 0$, ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x_o)}{Q(x_o)}$ **σελ. 49**

3) Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής. **(2016ΕΠ) σελ.51**

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με **Σωστό** ή **Λάθος:**

Α) Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_o. **ΣΛ (2002, 2006, 2019ΕΠ) σελ.47**

Β) Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) < 0$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_o **ΣΛ (2010, 2013) σελ.47**

Γ) Αν υπάρχει το όριο της f στο x_o, τότε $\lim\limits_{x\to x_o} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim\limits_{x\to x_o} f(x)}$, εφόσον $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_o, με $k \in IN$ και $k \geq 2$. **ΣΛ(2004ΕΠ) σελ.48**

Δ) Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_o}(f(x)+g(x))$, τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_o} g(x)$. **ΣΛ (2005) σελ.48**

Ε) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_o και ισχύει $f(x)\leq g(x)$ κοντά στο x_o , τότε $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) \leq \lim\limits_{x\to x_o} g(x)$ **ΣΛ(2015ΕΠ, 2016) σελ. 48**

Ζ) Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_o και $\lim\limits_{x\to x_o} |f(x)| = 0$,τότε $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = 0$ **ΣΛ (2002) σελ.48**

Η)Ισχύει ότι: $|\eta\mu x| \leq |x|$ για κάθε $x \in IR$ **ΣΛ(2013) σελ.52**

Θ) Ισχύουν οι : $\lim\limits_{x\to x_o} \eta\mu x = \eta\mu x_o$ και $\lim\limits_{x\to x_o} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_o$ **ΣΛ σελ.53**

Ι) Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1$ **ΣΛ(2009, 2013, 2016ΕΠ) σελ.53**

Κ) Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}$ =0 **ΣΛ(2018) σελ.53**

Λ) Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\eta\mu x}{x} = 1$ **ΣΛ(2011) σελ.53**

§1.6 Μη πεπερασμένο όριο στο $x_o \in IR$

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με **Σωστό** ή **Λάθος:**

Α) Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_o, τότε $\lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$. **ΣΛ (2005) σελ. 60**

Β) Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_o τότε $\lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$ **ΣΛ(2009ΕΠ) σελ. 60**

Γ) Αν $\lim_{x\to x_o} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x\to x_o}\frac{1}{f(x)}=0$ **ΣΛ(2010ΕΠ, 2014) σελ. 60**

Δ) Αν είναι $\lim_{x\to x_o} f(x)=+\infty$, τότε f(x)<0 κοντά στο x_o **ΣΛ(2012) σελ. 60**

Ε) Αν $\lim_{x\to x_o} f(x)=0$ και f(x)>0 κοντά στο x_o ,τότε $\lim_{x\to x_o}\frac{1}{f(x)}=+\infty$. **ΣΛ(2015) σελ. 60**

Ζ) Αν $\lim_{x\to x_o} f(x)=-\infty$ τότε f(x)>0 κοντά στο x_o. **ΣΛ(2015) σελ. 60**

Η) Αν $\lim_{x\to x_o} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x\to x_o}|f(x)|=+\infty$ **ΣΛ σελ. 60**

Θ) Αν $\lim_{x\to x_o} f(x)=+\infty$, τότε $\lim_{x\to x_o}\sqrt[\kappa]{f(x)}=+\infty$ με κ≥2 φυσικό αριθμό. **ΣΛ σελ. 60**

Ι) Ισχύει ότι $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{2\nu}}=+\infty$ **ΣΛ σελ. 60**

Κ) Ισχύει ότι $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{2\nu+1}}=+\infty$ **ΣΛ σελ. 61**

Λ) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f: **R→R** και g: **R→R** , αν $\lim_{x\to x_o} f(x)=0$ και $\lim_{x\to x_o} g(x)=+\infty$, τότε

$\lim_{x\to x_o}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=0$ **ΣΛ (2017) σελ. 61 (Θεωρ. 2ο)**

Μ) Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων f, g : (0, +∞) → IR , αν ισχύει $\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$ και $\lim_{x\to 0} g(x)=-\infty$, τότε $\lim_{x\to 0}\left[f(x)+g(x)\right]=0$ ».

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**. **Ψ**

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. **ΣΛ (2018ΕΠ) σελ. 62**

§1.7 Όρια συνάρτησης στο άπειρο

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με **Σωστό** ή **Λάθος:**

Α) Ισχύει ότι $\lim_{x\to +\infty} x^{\nu}=+\infty$, $\nu\in IN^*$ **ΣΛ σελ. 65**

Β) Ισχύει ότι $\lim_{x\to -\infty} x^{\nu}=+\infty$, $\nu\in IN^*$ **ΣΛ σελ. 65**

Γ) Ισχύει ότι $\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x^{\nu}}=0$,και $\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x^{\nu}}=0$, $\nu\in IN^*$ **ΣΛ σελ. 65**

Δ) Για μια πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_o$ με $\alpha_\nu\neq 0$ ισχύει ότι:
$\lim_{x\to\pm\infty} P(x) = \lim_{x\to\pm\infty}(\alpha_\nu x^\nu)$ **ΣΛ σελ. 66**

Ε) Για μια ρητή συνάρτηση $f(x)=\frac{\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0}{\beta_\kappa x^\kappa+\beta_{\kappa-1}x^{\kappa-1}+\ldots+\beta_1 x+\beta_0}$, με $\alpha_\nu\neq 0$, $\beta_\kappa\neq 0$ ισχύει ότι:

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa}\right)$ **ΣΛ σελ. 67**

Ζ) Αν $\alpha > 1$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x = 0$ **ΣΛ(2007) σελ. 67**

Η) Αν $\alpha > 1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^x = 0$ **ΣΛ σελ. 67**

Θ) Αν $0<\alpha<1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^x = 0$ **ΣΛ σελ. 67**

Ι) Αν $0<\alpha<1$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x = +\infty$ **ΣΛ (2017) σελ. 67**

Κ) Αν $\alpha > 1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_\alpha x = +\infty$ **ΣΛ σελ. 67**

Λ) Αν $\alpha > 1$ τότε $\lim\limits_{x\to0^+} \log_\alpha x = +\infty$ **ΣΛ σελ. 67**

Μ) Αν $0<\alpha<1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_\alpha x = -\infty$ **ΣΛ σελ. 67**

Ν) Αν $0<\alpha<1$ τότε $\lim\limits_{x\to0^+} \log_\alpha x = +\infty$ **ΣΛ σελ. 67**

§1.8 Συνέχεια συνάρτησης

1) Έστω μια συνάρτηση f και x_o ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_o; **(2009ΕΠ, 2015) σελ. 70**

2) Πότε μία συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της; **σελ. 70**

3) Να ορίσετε πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) και πότε σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. **(2004ΕΠ) σελ. 73**

4) Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α,β];**(2008ΕΠ, 2012, 2017) σελ. 73**

5) Να διατυπώσετε το Θεώρημα Bolzano **σελ. 74**

6) Ν*α γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη φράση η οποία συμπληρώνει σωστά την ημιτελή πρόταση:*
Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$, αν ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta) > 0$,τότε
α) η εξίσωση f(x)= 0 δεν έχει λύση στο (α,β).
β) η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς μία λύση στο (α,β).
γ) η εξίσωση f(x)= 0 έχει τουλάχιστον δύο λύσεις στο (α,β).
δ) δεν μπορούμε να έχουμε συμπέρασμα για το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης f(x)=0 στο (α,β).
(2017ΕΠ) σελ. 74

7) Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. Αν
• η f είναι συνεχής στο [α, β] και
• $f(\alpha) \neq f(\beta)$
δείξτε ότι για κάθε αριθμό **η** μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_o \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_o) = \eta$. **(2005, 2015) σελ. 76**

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με **Σωστό** ή **Λάθος:**
Α) Για κάθε συνάρτηση $f:A\to \mathbf{R}$, όταν υπάρχει το όριο της f καθώς το x τείνει στο $x_o \in A$, τότε αυτό το όριο ισούται με την τιμή της f στο x_o. **ΣΛ(2019) (+αιτιολόγηση παραδ. 2ο σελ. 71)**

Β) Κάθε πολυωνυμική και κάθε ρητή συνάρτηση είναι συνεχής **ΣΛ σελ. 71**

Γ) Οι συναρτήσεις $f(x) = α^x$ και $g(x) = \log_α x$, με $0< α \neq 1$, είναι συνεχείς **ΣΛ σελ. 71**

Δ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_o και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_o , τότε η σύνθεσή τους $g o f$ είναι συνεχής στο x_o. **ΣΛ(2007) σελ. 72**

Ε) Αν η f είναι συνεχής στο [α, β] με $f(α) < 0$ και υπάρχει $ξ \in (α, β)$ ώστε $f(ξ) = 0$, τότε κατ' ανάγκη $f(β)>0$ **ΣΛ (2005) σελ. 74 Λ**

Ζ) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : [α,β] \to \mathbf{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (α,β), αν $f(α) = f(β)$, τότε υπάρχει ακριβώς ένα $ξ \in (α,β)$ τέτοιο ώστε $f'(ξ) = 0$. **ΣΛ (2017ΕΠ) σελ. 74 Λ**

Η) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της. **ΣΛ(2008ΕΠ, 2013) σελ. 74**

Θ) Μια πολυωνυμική συνάρτηση $f :\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της. **ΣΛ(2019ΕΠ) σελ. 74**

Ι) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in Δ$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in Δ$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ. **(2005) σελ. 74**

Κ) Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα. **ΣΛ (2006, 2017) σελ. 76**

Λ) Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα. **ΣΛ(2007ΕΠ) σελ. 76 Λ**

Μ) Αν η f είναι συνεχής στο [α,β], τότε η f παίρνει στο [α,β] μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m. **ΣΛ(2016) σελ. 77**

Ν) Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο [α,β] και συνεχής στο (α,β], τότε η f παίρνει πάντοτε στο [α,β] μία μέγιστη τιμή. **ΣΛ (2002) σελ. 77**

Ξ) Το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού [α ,β], είναι το διάστημα [m ,M] ,όπου m είναι η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της. **ΣΛ σελ. 77**

Ο) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Α,Β) όπου $A= \lim\limits_{x\to α^+} f(x)$ και $B= \lim\limits_{x \to β^-} f(x)$.

ΣΛ(2007ΕΠ) σελ. 78

Π) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Α,Β), όπου $A= \lim\limits_{x\to α^+} f(x)$ και $B= \lim\limits_{x \to β^-} f(x)$

ΣΛ (2010) σελ. 78

§ 2.1 Η έννοια της παραγώγου
§ 2.2 Παραγωγίσιμες συναρτήσεις – παράγωγος συνάρτηση

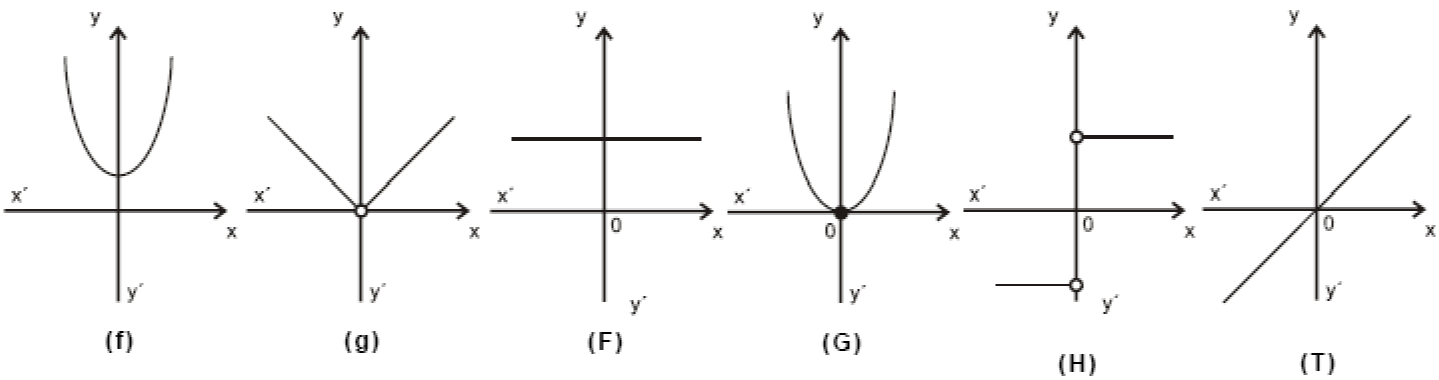
1) Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της; **(2004, 2009)   σ. 95**

2) Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ’ ένα σημείο x_o, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. **(2003 ,2007ΕΠ, 2018) σ. 99**

3) Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα [α,β] του πεδίου ορισμού της; **(2010ΕΠ, 2013)   σ. 104**

4) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x$,είναι παραγωγίσιμη στο IR και ισχύει ότι $f'(x) = 1$ **σ. 105**
5) Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = x^{\nu}$, $\nu \in IN - \{0,1\}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο IR και ισχύει: $f'(x) = \nu x^{\nu-1}$ **σ. 106**

6) Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει:
$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.   **(2005ΕΠ, 2009ΕΠ)   σ. 106**
7) Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, F, G, H, T.



Να γράψετε στο τετράδιο σας ποια από τις συναρτήσεις F, G, H, T μπορεί να είναι η παράγωγος της συνάρτησης f και ποια της g. **(2018ΕΠ) f-T ,g-H**
8) Έστω η συνάρτηση f(x) = ημx. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο IR και ισχύει f΄(x) = συνx.
(2002 ,2010ΕΠ)   σ. 106 – 107   ΕΚΤΟΣ ΥΛΗΣ
9) Να αποδείξετε ότι: (συνx)΄ = −ημx για κάθε $x \in$ IR. **(2006ΕΠ) σ. 107   ΕΚΤΟΣ ΥΛΗΣ**

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με **Σωστό** ή **Λάθος:**

Α) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της, τότε
$f'(x_o) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_o+h)-f(x_o)}{x-x_o}$ **ΣΛ   σ. 95**
Β) Η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού ,τη χρονική στιγμή t_o, είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσης $x=S(t)$ τη χρονική στιγμή t_o. Δηλαδή **$\upsilon(t_o) = S'(t_o)$ ΣΛ   σ. 96**

Γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο της $A(x_o, f(x_o))$ είναι η **$y - f(x_o) = f'(x_o)(x - x_o)$ ΣΛ σ. 96**

Δ) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό. **ΣΛ (2004ΕΠ, 2009ΕΠ, 2017) σ. 99**
Δώστε σχετικό παράδειγμα που δικαιολογεί την απάντησή σας.

Ε) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_o , τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_o. **ΣΛ(2016ΕΠ) σ.100**

Ζ) Για κάθε $x \in IR$ ισχύει ότι $(\sigma\upsilon\nu x)' = \eta\mu x$. **ΣΛ(2010, 2015) σ. 107**

§ 2.3 Κανόνες παραγώγισης § 2.4 Ρυθμός μεταβολής

1) Να αποδείξετε ότι αν δύο συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες σε σημείο x_o, τότε η συνάρτηση f+g είναι παραγωγίσιμη στο x_o και ισχύει $(f+g)'(x_o) = f'(x_o)+g'(x_o)$ **σ. 111**

2) Να αποδείξετε ότι αν δύο συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες σε σημείο x_o, τότε η συνάρτηση $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_o και ισχύει $(f\cdot g)'(x_o) = f'(x_o)\cdot g(x_o)+f(x_o)\cdot g'(x_o)$ **σ. 112**

3) Να αποδείξετε ότι $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$, για $x>0$ και $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Z}$ **σ. 116**

4) Να αποδείξετε ότι $(\alpha^x)' = \alpha^x \cdot \ell n\alpha$, για $\alpha>0$, και $x \in \mathbf{R}$ **σ. 116**

5) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in IR^*$ είναι παραγωγίσιμη στο IR^* και ισχύει:
$\left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{x}$ **(2008ΕΠ) σ. 117**

6) Να δώσετε τον ορισμό του ρυθμού μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_o **σ. 123**

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με **Σωστό** ή **Λάθος:**

Α) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_o,τότε η συνάρτηση $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_o και ισχύει: $(f\cdot g)'(x_o) = f'(x_o)\, g'(x_o)$ **ΣΛ (2004) σ. 112**

Β) Αν f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και $c \in IR$, τότε $(cf(x))' = cf'(x)$ **ΣΛ σ. 113**

Γ) Ισχύει ότι $(x^{-\nu})' = -\nu x^{-\nu-1}$, για $x \neq 0$ και $\nu \in IN^*$ **ΣΛ σ. 113**

Δ) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_o και $g(x_o) \neq 0$, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_o και ισχύει: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_o) = \frac{f(x_o)g'(x_o) - f'(x_o)g(x_o)}{\left[g(x_o)\right]^2}$ **ΣΛ(2006ΕΠ) σ. 113**

Ε) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $IR_1 = IR - \{x/\ \sigma\upsilon\nu x=0\}$ και ισχύει

$f'(x) = -\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ **ΣΛ(2009ΕΠ, 2011) σ.114**

Ζ) $(\sigma\varphi x)' = \dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$, $x \in$ IR –{x|ημx=0} **ΣΛ(2012) σ. 114**

Η) Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_o και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_o)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_o και ισχύει ότι $(f \circ g)'(x_o) = f'(g(x_o)) \cdot g'(x_o)$ **ΣΛ σ. 116**

Θ) Ισχύει ο τύπος $(3^x)' = x \cdot 3^{x-1}$, για κάθε $x \in$ IR . **ΣΛ(2006) σ. 116**

Ι) Αν $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$, τότε ισχύει $(\alpha^x)' = x \cdot \alpha^{x-1}$ **ΣΛ(2010ΕΠ) σ. 116**

Κ) Αν $f(x) = \ln|x|$, $x \in$ IR *, τότε $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ για κάθε $x \neq 0$ **ΣΛ(2006ΕΠ ,2016ΕΠ) σ. 117**

Λ) Η επιτάχυνση $\alpha(t_o)$ ενός κινητού τη χρονική στιγμή t_o ,είναι η δεύτερη παράγωγος του διαστήματος S
ΣΛ σ. 123

§ 2.5 Το Θεώρημα Μέσης Τιμής § 2.6 Συνέπειες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής
§ 2.7 Τοπικά ακρότατα συνάρτησης

1) Να διατυπώσετε το Θεώρημα Rolle **σ. 128**
2) Τι σημαίνει γεωμετρικά το θεώρημα Rolle του Διαφορικού Λογισμού; **(2007ΕΠ) σ.128**
3) Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Θ.Μ.Τ.) **(2013, 2016) σ.128**
4) Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού; **(2003, 2008, 2016) σ.129**
5)Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά. **(2019ΕΠ) σ.128 – 129**
6) Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η f είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ισχύει f΄(x) = 0, να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ. **(2004ΕΠ, 2009, 2014) σ.133**

7) Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και f΄(x) = g΄(x) για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει: f(x) = g(x) + c **σ. 133**

8) Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.
Να αποδείξετε ότι:
• Αν f΄(x)>0 σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.**(2006,2017)**
• Αν f΄(x)<0 σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ. **(2006) σ.135**

9) Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν f΄(x) >0 σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ **(2012,2019) σ.135**
10) Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_o \in A$ τοπικό μέγιστο; **(2012) σ.140**

11) Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_o \in$ Α τοπικό ελάχιστο; **(2015) σ.141**

12) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_o ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_o και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι $f'(x_o)=0$ **(2004, 2011, 2016ΕΠ, 2017ΕΠ) σ.142**

13) Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat που αφορά τα τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης. **(2019) σ.142**
14) Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x)>0$ στο $(α, x_o)$ και $f'(x)<0$ στο $(x_o, β)$, τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_o)$ είναι τοπικό μέγιστο της f. **(2016, 2019ΕΠ) σ.144**
15) Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(α, x_o)\cup(x_o, β)$, να αποδείξετε ότι το $f(x_o)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β). **(2018ΕΠ) σ.144**

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με **Σωστό** ή **Λάθος:**
Α) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε διάστημα [α,β] και παραγωγίσιμη στο (α,β), με f(α)=f(β) τότε υπάρχει $ξ\in(α,β)$, ώστε η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο Μ(ξ, f(ξ)) να είναι παράλληλη στον x΄x **ΣΛ σ.128**

Β) Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε ισχύει f(x) = g(x) για κάθε $x\in Δ$. **ΣΛ(2007ΕΠ) σ.133**
Γ) Κάθε συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(α, x_o)\cup(x_o, β)$, είναι σταθερή στο $(α, x_o)\cup(x_o, β)$. **ΣΛ(2016) σ.134**
Δ) Για κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $Α=(-\infty,0)\cup(0, +\infty)$ με $f'(x)=0$ για κάθε $x\in Α$, ισχύει ότι η f είναι σταθερή στο Α. **ΣΛ(2019) (+αιτιολόγηση ΣΧΟΛΙΟσ.134)**

Ε) Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ. **ΣΛ (2004) σ.135**

Ζ) Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x) >0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ. **ΣΛ σ. 135**
Ισχύει το αντίστροφο του ισχυρισμού; Δώστε σχετικό παράδειγμα **σ. 136**

Η) Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ. **ΣΛ(2007) σ. 136**

Θ) Για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ , η οποία είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε $x \in Δ$. **ΣΛ(2018) σ. 136**

Ι) Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ τότε $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ. **ΣΛ σ.136**

Κ) Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ, τότε η παράγωγός της είναι υποχρεωτικά αρνητική στο εσωτερικό του Δ. **ΣΛ(2014) σ.136**

Λ) Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, τότε η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του Δ.
ΣΛ (2010) σ.136
Μ) Για κάθε συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$. **ΣΛ (2017) σ.136 (Λ δες σχόλιο)**

Ν) Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης f μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο της f
ΣΛ(2019ΕΠ) σ.142
Ξ) Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα. **ΣΛ(2014) σ.142**

Ο) Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μιας συνάρτησης είναι ολικό μέγιστο της συνάρτησης **ΣΛ σ.142**

Π) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_o ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_o και $f'(x_o)=0$, τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_o. **ΣΛ (2003) σ.142**

Ρ) Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ, στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το 0, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ. **(2005ΕΠ) σ.143**

Σ) Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_o) και $f'(x) < 0$ στο (x_o, β), τότε το $f(x_o)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f . **ΣΛ (2003ΕΠ) σ.144**

§ 2.8 Κυρτότητα – Σημεία καμπής συνάρτησης
§ 2.9 Ασύμπτωτες – κανόνες De l'Hospital
§ 2.10 Μελέτη και χάραξη γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης
1) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ; **(2010, 2014) σ.155**

2) Εστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ; **(2006) σ.155**

3) Πότε ένα σημείο $A(x_o, f(x_o))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f; **σ.157**

4) Πότε μία ευθεία $x = x_o$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ; **(2003ΕΠ, 2010, 2015ΕΠ) σ.161**

5) Πότε η ευθεία $y=\ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$; **(2007, 2016ΕΠ) σ.162**

6) Πότε η ευθεία $y = λx + β$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$; **(2005, 2011) σ.162**

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με **Σωστό** ή **Λάθος:**

Α) Αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη σ' ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται κάτω από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους. **ΣΛ(2008) σ.156 (σχόλιο1)**

Β) Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση. **ΣΛ (2003) σ.156 (σχόλιο1)**

Γ) Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν $f''(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ. **ΣΛ (2003) σ.156**

Δ) Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο IR και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x. **ΣΛ(2008ΕΠ) σ.156 (σχόλιο2)**

Ε) Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o. Αν η f είναι κυρτή στο $(α,x_o)$ και κοίλη στο $(x_o,β)$ ή αντιστρόφως, τότε το σημείο Α είναι υποχρεωτικά σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f. **ΣΛ(2005ΕΠ) σ.157**

Ζ) Αν το σημείο $A(x_o, f(x_o))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη ,τότε $f''(x_o)= 0$ **ΣΛ σ.157**

Η) Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Για κάθε συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο **R** , αν για κάποιο $x_o \in$ **R** ισχύει $f''(x) =0$, τότε το x_o είναι θέση σημείου καμπής της f».
α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α**, αν είναι αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι ψευδής. **Ψ**
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **(α)**. **(2017ΕΠ) σ.157**

Θ) Οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σ'ένα διάστημα Δ είναι τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f'' μηδενίζεται και τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η f''. **ΣΛ σ.157**

Ι) Η ευθεία $y=λx+β$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συμνάρτησης f στο $+\infty$, αν και μόνο αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=λ\in IR$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(λx+β)]=0$ **ΣΛ σ.162**
Κ) Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f : IR \to IR$ μπορεί να τέμνει μια ασύμπτωτή της. **Σ (2018ΕΠ) δεν αναφέρεται στο βιβλίο**

Λ) Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2, της οποίας η γραφική παράσταση έχει ασύμπτωτη. **ΣΛ(2015ΕΠ, 2016ΕΠ) σ.163(σχόλια)**

Μ) Οι ρητές συναρτήσεις $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$,με βαθμό του P(x) μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του Q(x), δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες. **ΣΛ σ.163**

Ν) Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_o} g(x)=0$, $x_o \in IR \cup \{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο) τότε: $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. **ΣΛ σ.164**

Ξ) Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_o} g(x)=+\infty$, $x_o \in IR \cup \{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο) τότε: $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. **ΣΛ σ.165**

§ 3.1 Αόριστο Ολοκλήρωμα § 3.4 Ορισμένο Ολοκλήρωμα § 3.5 Η συνάρτηση F(x)=$\int_\alpha^x f(t)dt$
§ 3.7 Εμβαδό επίπεδου χωρίου

1) Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ; **(2006ΕΠ, 2019ΕΠ) σ.185**
2) Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μία παράγουσα της f στο Δ, να αποδείξετε ότι:

α. όλες οι συναρτήσεις της μορφής G(x) =F(x) + c , c $\in$ IR είναι παράγουσες της f στο Δ και

β. κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή G(x) =F(x) + c, c $\in$ IR . **(2003ΕΠ, 2010, 2015ΕΠ) σ. 186**

3) Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού. **(2018) σ.216**

4) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε να δείξετε ότι $\int_\alpha^\beta f(t)dt$ = G(β)-G(α) **(2002, 2008, 2013) σ.216-17**

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με **Σωστό** ή **Λάθος:**
Α) Για κάθε συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ, ισχύει $\int f'(x)dx$ = f(x) + c, $x \in \Delta$ όπου c είναι μια πραγματική σταθερά. **ΣΛ(2009ΕΠ) σ.187 Σ(εκτός ύλης)**

Β) Το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x΄x. **ΣΛ(2008) σ.211 Σ**

Γ) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα [α, β] και ισχύει f(x)<0 για κάθε $x \in [α, β]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου **Ω** που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες x=α, x=β και τον άξονα x΄x ,είναι $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta f(x)dx$ **ΣΛ(2009) σ.212**

Δ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β] και ισχύει f(x)≥0 για κάθε $x\in[α,β]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx \ge 0$ **ΣΛ(2010ΕΠ) σ.212 Σ**

Ε) Για μια συνεχή συνάρτηση f σε ένα διάστημα [α,β] ,ορίζουμε $\int_\alpha^\beta f(x)dx = -\int_\beta^\alpha f(x)dx$ **ΣΛ σ.212**

Ζ) Ορίζουμε για μια συνεχή συνάρτηση f ότι $\int_\alpha^\alpha f(x)dx = 0$ **ΣΛ σ.212**

Η) Αν f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα [α,β] και για κάθε $x\in[α, β]$ ισχύει $f(x) \ge 0$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx > 0$.
ΣΛ(2007) σ.214 Λ

Θ) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : [α,β] \to \mathbf{R}$, αν ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$, τότε f(x) = 0 για κάθε $x \in [α,β]$.
ΣΛ(2017ΕΠ, 2019ΕΠ) σ.214

Ι) Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $α,β,γ\in Δ$ τότε ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx$
ΣΛ(2008ΕΠ, 2014) σ.214

Κ) Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α,β]. Αν ισχύει ότι f(x)≥0 για κάθε $x\in [α,β]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx >0$. **ΣΛ(2015) σ.214**

Λ) Για κάθε συνάρτηση f, συνεχή στο [α,β], ισχύει: αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx >0$,τότε f(x)>0 στο[α,β]. **ΣΛ(2016ΕΠ) σ.214**

Μ) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ’ ένα διάστημα [α,β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α,β], τότε $\int_\alpha^\beta f(t)dt$ = G(β)-G(α) **ΣΛ (2004) σ.216**

Ν) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : [α,β] \to \mathbf{R}$, αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α,β], τότε $\int_\beta^\alpha f(x)dx$ =G(α) − G(β). **ΣΛ (2017ΕΠ) σ.216**

Ξ) Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε ισχύει $\left(\int_\alpha^x f(t)dt\right)' = f(x) - f(\alpha)$ για κάθε $x \in Δ$. **ΣΛ (2005) σ.216 Λ**

Ο) Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α,β]. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο [α,β], τότε $\int_\alpha^\beta f(t)dt$ = G(α)-G(β). **ΣΛ (2006ΕΠ, 2015ΕΠ, 2016) σ.216**

Π) Αν f είναι μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε

$\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)dt\right)' = f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$. **ΣΛ(2007ΕΠ) σ.216**

Ρ) Ισχύει η σχέση $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$, όπου f΄,g΄ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο [α,β]. **ΣΛ(2006) σ.218**

Σ) Αν f, g, g΄ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα [α,β], τότε

$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \cdot \int_{\alpha}^{\beta} g'(x)dx$ **ΣΛ(2007ΕΠ) σ.218**

Τ) $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$, όπου f΄,g΄ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο [α,β].
ΣΛ(2012) σ.218

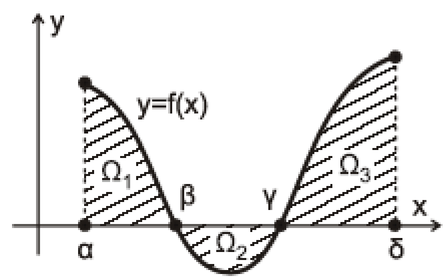
Υ) Ισχύει ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)du$,όπου f, g΄ είναι συνεχείς συναρτήσεις ,u=g(x), du=g΄(x)dx και u_1=g(α), u_2=g(β) **ΣΛ σ.219**

Φ) Έστω f,g δύο συνεχείς συναρτήσεις σε διάστημα [α,β]. Το εμβαδό του χωρίου που περιλαμβάνεται μεταξύ των C_f και C_g και των ευθειών x=α και x=β, είναι ίσο με Ε(Ω) = $\int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - g(x)| dx$ **ΣΛ σ.227**

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Α) Έστω η συνάρτηση f του διπλανού σχήματος. Αν για τα εμβαδά των χωρίων Ω_1, Ω_2 και Ω_3 ισχύει ότι Ε(Ω_1)=2, Ε(Ω_2)=1 και Ε(Ω_3)=3, τότε το $\int_{\alpha}^{\delta} f(x)dx$ είναι ίσο με:

α) 6 **β)** -4 **γ)** 4 **δ)** 0 **ε)** 2 **(2019) σ.228 ΣΧΟΛΙΟ**



Σωστό: γ **Ε(Ω_1)−Ε(Ω_2)+Ε(Ω_3)**