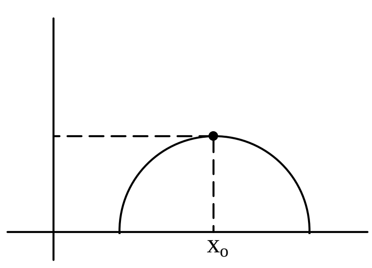
**ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ**
**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ(σελ.177 – 181)**
**(Ι)**

**1) Α** ,λόγω Θ. Rolle (υποθέτουμε ότι f(0) = f(1) και καταλήγουμε σε άτοπο)
**2) Α ,** αφού f παραγωγίσιμη στο [α,β] είναι και συνεχής σ’αυτό οπότε από ΘΜΤ ,υπάρχει $x_o \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f'(x_o) = \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$<0 αφού f(β) < f(α).
**3) Α ,**θεωρώ h(x) = f(x) – g(x) παραγωγίσιμη στο [α,β] (διαφορά) άρα και συνεχής. Επίσης h(α) = f(α) – g(α) = f(β) – g(β) = h(β). Από Θ. Rolle υπάρχει $x_o \in (\alpha,\beta)$ ώστε $h'(x_o) = 0 \Leftrightarrow f'(x_o) - g'(x_o) = 0 \Leftrightarrow f'(x_o) = g'(x_o)$ που σημαίνει ότι στα σημεία $A(x_o, f(x_o))$ και $B(x_o, g(x_o))$ είναι παράλληλες.
**4)** Ο πίνακας μεταβολών προσήμου της f΄ είναι

| x | $-\infty$ 1 | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $(x-1)^2(x-2)$ | – | – | + |
| f | ↓ | ↓ | ↑ |

Επομένως α) **Ψ** και β) **Α**
**5) α) Α ,** διότι εφόσον η f είναι πολυωνυμική άρτιου βαθμού, η f΄ είναι πολυωνυμική περιττού βαθμού που σημαίνει ότι έχει πάντα τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα.
**β) Ψ ,** όπως και το (α) η f΄ είναι πολυωνυμική άρτιου βαθμού, οπότε δεν έχει πάντα πραγματικές ρίζες.
**6) Α ,**είναι $f''(x) = 6\alpha x+2\beta$, η οποία έχει μοναδική ρίζα $x_o = -\dfrac{\beta}{3\alpha}$ και το πρόσημο της f΄΄ αλλάζει εκατέρωθεν του $x_o$ .
**7) Ψ ,** αφού έχουν στο $x_o$ σημείο καμπής έχουμε $f''(x_o) = g''(x_o) = 0$ **(1)**. Επίσης $h'(x_o) = f'(x_o)g(x_o) + f(x_o)g'(x_o)$ και $h''(x_o) = f''(x_o)g(x_o) + f'(x_o)g'(x_o) + f'(x_o)g'(x_o) + f(x_o)g''(x_o)$ και λόγω της **(1)** έχουμε $h''(x_o) = 2f'(x_o)g'(x_o)$ το οποίο δεν είναι υποχρεωτικά 0.
**8) Α ,** αφού η f(x)>0 για κάθε $x \in D_f$ ,η απόσταση οποιουδήποτε σημείου της $C_f$ από τον x΄x ισούται με d(x) =f(x). Επομένως αφού η απόσταση παρουσιάζει μέγιστο ή ελάχιστο στο σημείο $x_o$ και η f παραγωγίζεται, από το Θ.Fermat έπεται ότι $f'(x_o) = 0$, άρα σ’αυτό το σημείο η εφαπτόμενη είναι οριζόντια.
**9) α) Ψ ,** αφού $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1} = -1 \neq \pm\infty$

**β) Α ,** $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-3x+2}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{(x-1)}\lim\limits_{x\to 1^-}(x-2) = +\infty$ ή αντίστοιχα $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = -\infty$ .
**10)** Η f έχει π.ο. [1,4] είναι παραγωγίσιμη στο (1,4). Επίσης παρουσιάζει μέγιστο στο $x_o \in (\alpha,\beta)$ οπότε από Θ.Fermat έπεται ότι $f'(x_o) = 0$. Άρα




**i) Ψ**
**ii) Ψ**
**iii) Ψ**
**iv) Α**

**11)** Είναι $f'(x) = 3x^2+1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$ ,οπότε f ↗ **R**

**α) Ψ ,** η f είναι συνεχής στο [0,1] και $\nearrow$ **R,** οπότε f([0,1])=[f(0),f(1)]=[1,3] και $0 \notin [1,3]$ μετά από Θ. Ενδιαμέσων Τιμών.
**β) Α ,** ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Bolzano και είναι γν. αύξουσα
**γ) Ψ ,** αφού έχει μία ρίζα στο (−1,0) και είναι γν. αύξουσα θα είναι και η μοναδική της ρίζα.
**12) Α ,**είναι $(f\circ g)'(0)=f'(g(0))g'(0) = f'(5)\cdot 1= 6\cdot 1 =6$ και $(g\circ f)'(0)=g'(f(0))f'(0) = g'(4)\cdot 3= 2\cdot 3 =6$

**(ΙΙ)**

**1)** Το ζητούμενο όριο ισούται με $εφ'\left(\frac{\pi}{6}\right)$. Όμως $(εφx)'=\frac{1}{συν^2 x}$, οπότε $εφ'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{συν^2\left(\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}$. Σωστό το **Β.**

**2)** $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{2}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}$ **=** $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$ **.** Σωστό το **Γ.**

**3)** $5^{3x}=e^{\ln 5^{3x}}=e^{3x\ln 5}$. Άρα $f'(x)=\left(e^{3x\ln 5}\right)'=e^{3x\ln 5}\cdot(3x\ln 5)' = 5^{3x}\cdot 3\ln 5=5^{3x}\cdot\ln 5^3=5^{3x}\cdot\ln 125$ .Σωστό **Ε.**

**4)** $f'(x) = \ldots= -3συν^2(x+1)\cdot ημ(x+1)$. Άρα $f'(\pi) =-3συν^2(\pi+1)\cdot ημ(\pi+1)$. Σωστό **Γ.**

**5)** Η f(x) είναι πολυωνυμική 6$^{ου}$ βαθμού ,οπότε η $f^{(7)}(x) = 0$, άρα $f^{(7)}(0) = 0$. Σωστό **Γ.**

**6)** x>0 και έχουμε $f'(x_o)= g'(x_o) \Rightarrow \frac{1}{x_o}=4x_o \Rightarrow {x_o}^2=\frac{1}{4}$, άρα $x_o=\frac{1}{2}$, αφού $x_o>0$. Σωστό **Γ.**

**7)** $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)}{g'(x)}\Rightarrow\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}=\frac{\beta e^{\beta x}}{\alpha e^{\alpha x}}\Rightarrow\frac{\beta e^{\beta x}\cdot e^{\alpha x}-e^{\beta x}\cdot\alpha e^{\alpha x}}{(e^{\alpha x})^2}=\frac{\beta e^{\beta x}}{\alpha e^{\alpha x}}\Rightarrow\frac{e^{\beta x}(\beta-\alpha)}{e^{\alpha x}}=\frac{\beta e^{\beta x}}{\alpha e^{\alpha x}}$

$\Rightarrow\beta-\alpha=\frac{\beta}{\alpha}\Rightarrow\ldots\Rightarrow\beta=\frac{\alpha^2}{\alpha-1}$. Σωστό **Ε.**

**8)** Αφού $f'(x)>0$ για κάθε $x\in[-1,1]$ ,είναι f $\nearrow$ [-1,1]. Επομένως $-1<0<1\overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(-1)<f(0)<f(1)\Rightarrow f(-1)<0<f(1)$ αφού f(0) = 0. Σωστό **Γ.**

**(ΙΙΙ)**

**1) (α) → (Ε) (β) → (Α) (γ) → (Β) (δ) → (Δ)**

**2) (1) →(Δ).** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\ldots=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+1}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3}=1$, άρα λ = 1, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\ldots=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$, άρα η y=x πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

**(2) → (Γ).** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\ldots=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-x}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{xe^x}\right)=-1+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{e^x}=-1$ ,άρα λ = −1, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+x]=\ldots=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{e^x}\right)=1$, άρα η y=−x+1 πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

**(3) → (Α).** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\ldots=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2}=0$, άρα λ = 0, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\ldots=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x-2}=2$

άρα η y= 2 οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.