ΘΕΜΑ Β 2019

Δίνεται η συνάρτηση f :**R**→**R** με τύπο f(x)=e^{-x} +λ, όπου λ∈**R**, η οποία έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο +∞ την ευθεία y=2.

Β1. Να αποδείξετε ότι λ=2. **Μονάδες 3**

Β2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)−x=0 έχει μοναδική ρίζα, η οποία βρίσκεται στο διάστημα (2,3). **Μονάδες 7**

Β3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1 (μονάδες 2) και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφή της (μονάδες 4). **Μονάδες 6**

Β4. Έστω $f^{-1}(x)=-\ln(x-2)$, x>2. Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης (μονάδες 3) και στη συνέχεια να κάνετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση των συναρτήσεων f και f^{-1} στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων (μονάδες 6).
Μονάδες 9

<u>Λύση</u>

Β1. Αφού η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο +∞ την ευθεία y=2 αυτό σημαίνει ότι

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(e^{-x}+\lambda)=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(e^{-x})+\lim\limits_{x\to+\infty}\lambda=2 \Leftrightarrow 0+\lambda=2 \Leftrightarrow \lambda=2$

<u>Ερώτηση</u>: πώς δείχνουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{-x})=0$;

Β2. f(x)−x=0 ⇔ $e^{-x}-x+2=0$ (1)

Θεωρώ τη συνάρτηση g(x)= $e^{-x}-x+2$

Η g είναι συνεχής στο [2,3] (άθροισμα++++)

$g(2)=e^{-2}-2+2=e^{-2}>0$

$g(3)=e^{-3}-3+2=e^{-3}-1<0$ (;…..δικαιολογείστε)

Άρα g(2)·g(3)<0 ,οπότε από το Θ. Bolzano υπάρχει ξ∈(2,3), ώστε g(ξ)=0, δηλαδή η (1) έχει μια τουλάχιστον λύση.

Τώρα είναι $g'(x)=-e^{-x}-1<0$ για κάθε x∈**R.** Συνεπώς η g είναι γνησίως φθίνουσα στο **R.** Άρα η (1) έχει μοναδική λύση στο (2,3).

Β3. Έστω x_1, x_2 ∈**R ,**με $f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow e^{-x_1}+2=e^{-x_2}+2 \Leftrightarrow e^{-x_1}=e^{-x_2} \Leftrightarrow -x_1=-x_2$, εφόσον η e^x είναι γνησίως αύξουσα. Άρα $x_1=x_2$ που σημαίνει ότι η f είναι 1-1.

Εναλλακτικά $f'(x)=-e^{-x}<0$ για κάθε x ∈**R,** άρα f γνησίως φθίνουσα, άρα 1 – 1.

Αφού η f είναι 1-1, αντιστρέφεται.

Έστω τώρα y=f(x) ⇔ y= $e^{-x}+2$ ⇔ $e^{-x}=y-2$ ⇔ $\ln(e^{-x})=\ln(y-2)$ με y>2

⇔ $-x=\ln(y-2)$ ⇔ $x=-\ln(y-2)$. Συνεπώς $f^{-1}(x)=-\ln(x-2)$ με x>2.

Β4. Αναζητούμε κατακόρυφη ασύμπτωτη της f^{-1} στο σημείο 2

Έχουμε $\lim\limits_{x\to2^+} f^{-1}(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\left[-\ln(x-2)\right]$ (2)

Θέτουμε u = x – 2 και υπολογίζουμε το $\lim_{x\to 2^+} u = \lim_{x\to 2^+}(x-2) = 0^+$

Το όριο (2) γίνεται $\lim_{x\to 2^+} f^{-1}(x) = \lim_{x\to 0^+}(-\ln u) = -\lim_{x\to 0^+}\ln u = -(-\infty) = +\infty$. Άρα η ευθεία x=2 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f^{-1}

Μελέτη της $f(x)= e^{-x} +2$

Σημείο τομής με y΄y: f(0)=3 A(0,3).

Σημεία τομής με τον x΄x δεν υπάρχουν αφού f(x)>0 για κάθε x∈**R**

H f είναι συνεχής (++) και παραγωγίσιμη στο **R** με $f'(x) = -e^{-x} <0$ για κάθε x ∈**R,** άρα f γνησίως φθίνουσα.

Επίσης παραγωγίζεται η f΄ και έχουμε $f''(x)= e^{-x}>0$ για κάθε x∈**R**, που σημαίνει ότι η f είναι **κυρτή** στο **R**. Για να σχεδιάσουμε τις f και f^{-1}, λαμβάνουμε υπόψη ότι οι γραφικές τους παραστάσεις είναι **συμμετρικές** ως προς την ευθεία y=x.